Feuille 6 : Logique du premier ordre

Exercice 1 :

On considère la signature $\Sigma = (\{c, \ldots\}, \{f^{(1)}, g^{(2)}\}, \{R^{(2)}\})$.
On interprète les formules dans la structure $\mathcal{S}$ de domaine $\mathbb{N}$, $[\![c]\!]_{\mathcal{S}} = 0$, $[\![f]\!]_{\mathcal{S}} = x \mapsto x+1$, $[\![g]\!]_{\mathcal{S}} = x, y \mapsto x+y$ et $[\![R]\!]_{\mathcal{S}} = \leq$.

Quelle est l'interprétation des termes :

Q 1.1 $f(g(g(c,c),c))$

Q 1.2 $g(f(c), f(c))$

Q 1.3 $f(f(f(c)))$?

Pour chaque formule ci-dessous, donner l'ensemble de ses variables libres et dire pour quelle substitution de ces variables la structure $\mathcal{S}$ satisfait la formule.

Q 1.4 $\varphi_1 = \forall x \exists y R(x,y)$

Q 1.5 $\varphi_2 = \exists x R(f(x), g(y,c))$

Q 1.6 $\varphi_3 = \forall y R(f(g(x,y)), g(y,c))$

Exercice 2 :

Donner une formule φ exprimant chacune des propriétés suivantes ainsi qu'une structure $\mathcal{S}$ qui la satisfait.

Q 2.1 x est supérieur ou égal à y.

Q 2.2 0 est le plus petit entier.

Q 2.3 l'addition est associative.

Q 2.4 x est impair.

Q 2.5 x est le carré de y.

Q 2.6 la distributivité de $\times$ par rapport à $+$.

Exercice 3 :

Montrer que $\exists y \forall x (P(x) \wedge Q(y)) \equiv \forall x \exists y (P(x) \wedge Q(y))$.

Exercice 4 :

On considère les formules suivantes :
— $\varphi_1 = \forall x \exists y R(x,y)$
— $\varphi_2 = \exists x \forall y R(x,y)$
— $\varphi_3 = \forall x \forall y R(x,y)$
— $\varphi_4 = \forall x \forall y (R(x,y) \vee E(x,y) \vee R(y,x))$

Q 4.1 Parmi ces formules, lesquelles sont satisfaites par la structure $\mathcal{S}_1$ de domaine $\mathbb{Z}$ avec $[\![R]\!]_{\mathcal{S}_1} = \leq$ et $[\![E]\!]_{\mathcal{S}_1} = =$? Justifier.

Q 4.2 Parmi ces formules, lesquelles sont satisfaites par la structure $\mathcal{S}_2$ de domaine $2^{\{0,1\}}$ avec $[\![R]\!]_{\mathcal{S}_2} = \subseteq$ et $[\![E]\!]_{\mathcal{S}_2} = =$? Justifier.

Exercice 5 :

Soient φ et ψ des formules du 1^er^ ordre, donner une preuve des formules suivantes en Déduction Naturelle :

Q 5.1 $\forall x.(\varphi(x) \Rightarrow \varphi(x))$

Q 5.2 $\forall x \forall y.\varphi(x,y) \Rightarrow \forall y \forall x.\varphi(x,y)$

Q 5.3 $\forall x.(\varphi(x) \wedge \psi(x)) \Rightarrow \forall x.\varphi(x) \wedge \forall x.\psi(x)$

Q 5.4 $\exists x.(\varphi(x) \wedge \psi) \Rightarrow \exists x.\varphi(x) \wedge \psi$ où $x \notin vl(\psi)$

Q 5.5 $\exists x.\varphi(x) \wedge \psi \Rightarrow \exists x.(\varphi(x) \wedge \psi)$ où $x \notin vl(\psi)$.