

Feuille 5 : Logique du premier ordre

**Exercice 1 :**

Donner des formules du 1<sup>er</sup> ordre du langage mathématique usuel qui permettent d'exprimer les propriétés suivantes.

- Q 1.1  $x$  est supérieur ou égal à  $y$ .
- Q 1.2 0 est le plus petit entier naturel.
- Q 1.3 L'addition est associative.
- Q 1.4  $x$  est impair.
- Q 1.5  $x$  est le carré de  $y$ .
- Q 1.6 La distributivité de  $\times$  par rapport à  $+$ .

**Exercice 2 :**

- Aucun dragon fort ne peut ne pas souffler le feu.
- Un dragon rusé a toujours des cornes.
- Aucun dragon faible n'a de cornes.
- Les touristes ne chassent que des dragons ne soufflant pas de feu.

- Q 2.1 Définir cinq prédicats permettant de réécrire les affirmations précédentes sous forme de formules du premier ordre.
- Q 2.2 Réécrire ces affirmations sous forme de formules du premier ordre.
- Q 2.3 Un dragon rusé doit-il craindre les touristes ?

**Exercice 3 :**

Dans les syllogismes aristotéliens, interviennent souvent des propriétés  $P$ ,  $Q$  des individus et des assertions ayant les formes suivantes :

- Q 3.1 Tous les  $P$  sont des  $Q$ .
- Q 3.2 Certains  $P$  sont des  $Q$ .
- Q 3.3 Aucun  $P$  n'est un  $Q$ .
- Q 3.4 Certains  $P$  ne sont pas des  $Q$ .

Traduire ces assertions par des formules du calcul des prédicats, en introduisant les prédicats  $P(x)$  et  $Q(x)$ .

**Exercice 4 :**

Soit  $D$ , un ensemble de danseurs. On note  $d(a, b)$  le fait que les danseurs  $a$  et  $b$  dansent ensemble. Donner une formule de la logique des prédicats exprimant qu'aucun danseur ne danse avec lui-même et qu'aucun danseur ne danse avec deux danseurs à la fois, en n'utilisant que le prédicat  $d$  et le prédicat d'égalité sur  $D$ .