

Feuille 4 : Logique Propositionnelle**Exercice 1 :**

Montrer que les formules suivantes sont dérivables.

Q 1.1 $\varphi \Rightarrow \varphi$

Q 1.2 $\neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$

Q 1.3 $\varphi \wedge \psi \Rightarrow \neg(\varphi \Rightarrow \neg\psi)$

Exercice 2 :

Prouver le Théorème 5, c'est-à-dire :

Q 2.1 $\vdash \varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \varphi)$;

Q 2.2 $\vdash \varphi \Rightarrow (\neg\varphi \Rightarrow \psi)$;

Q 2.3 $\vdash (\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow ((\psi \Rightarrow \theta) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \theta))$;

Q 2.4 $\vdash (\varphi \Rightarrow \psi) \Leftrightarrow (\neg\psi \Rightarrow \neg\varphi)$;

Q 2.5 $\vdash \neg\neg\varphi \Leftrightarrow \varphi$;

Q 2.6 $\vdash (\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \theta)) \Leftrightarrow (\varphi \wedge \psi) \Rightarrow \theta$;

Q 2.7 $\vdash \perp \Leftrightarrow (\varphi \wedge \neg\varphi)$

Exercice 3 : Tombola

Vous décidez d'acheter un billet de tombola. Le buraliste vous en présente cinq, de 1 à 5, et vous déclare :

- (a) Si 5 est perdant, 1 est gagnant ;
- (b) Si 4 est perdant, 2 est gagnant ;
- (c) Si 3 est perdant, 5 aussi ;
- (d) Si 1 est gagnant, 2 aussi ;
- (e) Si 3 est gagnant, 4 est perdant.

Q 3.1 Montrez $\vdash \varphi \vee \neg\varphi$

Q 3.2 Écrivez les hypothèses avec des formules propositionnelles.**Q 3.3** Sous ces hypothèses, donner une dérivation prouvant que 2 est gagnant.**Exercice 4 :**

Montrer que $(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\neg\psi \Rightarrow \neg\varphi)$ est prouvable sans les règles (\perp_c) et (\perp_e) .

Exercice 5 :

Donner une preuve de $(\varphi \vee \psi \Rightarrow \theta) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \theta) \vee (\psi \Rightarrow \theta)$.