Feuille 3 : Logique Propositionnelle

Exercice 1 :

Mettre sous forme normale disjonctive les formules suivantes :

Q 1.1 $\neg(p \wedge (q \Rightarrow p))$

Q 1.2 $((p \vee q) \Rightarrow r) \wedge ((p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r))$

Q 1.3 $(p \vee (q \Rightarrow r)) \Rightarrow ((p \vee q) \Rightarrow r)$

Exercice 2 :

On définit le connecteur $<$ par sa table de vérité :

φ	ψ	$\varphi < \psi$
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	0

Le système $\{<, \Rightarrow\}$ est-il un système complet ? Justifier.

Exercice 3 :

On définit le connecteurs $\oplus$ ("ou exclusif") par la table de vérité suivante :

φ	ψ	$\varphi \oplus \psi$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Q 3.1 Trouver une formule équivalente à $\varphi \Leftrightarrow \psi$ qui n'utilise que les connecteur $\neg$ et $\oplus$.

Q 3.2 Trouver une formule équivalente à $\varphi \vee \psi$, n'utilisant que les connecteurs $\wedge$ et $\oplus$.

Q 3.3 Peut-on trouver, pour toute formule n'utilisant que $\neg$ et $\oplus$ une formule équivalente n'utilisant que $\Leftrightarrow$ et $\oplus$?

Q 3.4 Peut-on trouver une formule équivalente à $\varphi \Leftrightarrow \psi$ n'utilisant que les connecteurs $\wedge$ et $\oplus$?

Q 3.5 On considère l'ensemble E des formules construites en n'utilisant que la variable propositionnelle p, les parenthèses et le connecteur $\oplus$. Trouver deux formules du calcul propositionnel φ et ψ telles que toute formule de E est équivalente à φ ou à ψ.

Q 3.6 Peut-on trouver, pour toute formule du calcul propositionnel une formule équivalente n'utilisant que les connecteurs $\Leftrightarrow$ et $\oplus$? Justifier.

Q 3.7 On sait que
- φ est symétrique en p et r, i.e. $\varphi(p, q, r) \equiv \varphi(r, q, p)$,
- φ n'est pas une tautologie.

Combien de formules reste-t-il ?

Q 3.8 On possède une dernière information concernant φ :
- $(p \vee q) \Rightarrow \varphi$ est une tautologie.

Montrer, en construisant sa table de vérité, que φ est maintenant complètement déterminée (toujours modulo $\equiv$). Donner sa forme normale disjonctive.