

**Devoir surveillé**

Le seul document autorisé est une feuille A4 manuscrite recto/verso.  
Le barème est indicatif, pour vous aider à savoir la quantité de détails attendu dans la réponse.

**Exercice 1 : Prolog**

Détaillez l'unification des termes suivants :

**Q 1.1**  $t_1 = f(A)$  et  $t_2 = f(a)$  (0,5 points)

**Q 1.2**  $t_3 = g(X, 0)$  et  $t_4 = g(h(z), Y)$  (0,5 points)

**Q 1.3**  $t_5 = a(b, c)$  et  $t_6 = a(d(e), c)$  (0,5 points)

**Q 1.4**  $t_7 = 0 + 0$  et  $t_8 = 0$  (0,5 points)

Écrivez les fonctions suivantes en Prolog :

**Q 1.5** `hd` qui retourne la tête d'une liste (1 points)

```
?- hd([], X).  
false.
```

```
?- hd([1, 2, 3], X).  
X = 1.
```

**Q 1.6** `flat`, qui applatit une liste de listes. (1 points)

```
?- flat([[1, 2, 3], [4, 5, 6], [7, 8]], L).  
L = [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8].
```

**Q 1.7** `max` qui retourne le maximum d'une liste. (1 points)

```
?- max([1, 2, 4, 5, 7, 6], A).  
A = 7.
```

**Q 1.8** `element` qui retourne le  $i^{\text{e}}$  élément d'une liste. (1 points)

```
?- element([a, b, c, d, e, f], 3, X).  
X = c.
```

## Exercice 2 : Logique propositionnelle

On définit le connecteur cause logique  $\Leftarrow$  par sa table de vérité :

$\varphi$	$\psi$	$\varphi \Leftarrow \psi$
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

**Q 2.1** Montrer que le système  $\{\perp, \Leftarrow\}$  est un système complet de connecteurs. (2 points)

On définit les règles d'introduction et d'élimination de  $\Leftarrow$  ci-dessous :

$$\frac{\Gamma, B \vdash A}{\Gamma \vdash A \Leftarrow B} \Leftarrow_i \qquad \frac{\Gamma \vdash A \Leftarrow B \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A} \Leftarrow_e$$

Démontrez ces formules en déduction naturelle plus les deux règles ci-dessus :

**Q 2.2**  $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (B \Leftarrow A)$  (1 points)

**Q 2.3**  $\neg A \Leftrightarrow (\perp \Leftarrow A)$  (1 points)

**Q 2.4**  $(A \vee B) \Rightarrow (A \Leftarrow \neg B)$  (1 points)

**Q 2.5**  $(A \Leftarrow \neg B) \Rightarrow (A \vee B)$  (1 points)

## Exercice 3 : Logique du premier ordre

On considère la signature  $\Sigma = (\{v, \dots\}, \{f_a^{(1)}, f_b^{(1)}, c^{(2)}\}, \{R^{(2)}\})$ .

On interprète les formules dans la structure  $\mathcal{S}$  de domaine les chaînes de caractères,  $\llbracket v \rrbracket_{\mathcal{S}} = \text{" "}$ ,  $\llbracket f_a \rrbracket_{\mathcal{S}} = m \mapsto am$ ,  $\llbracket f_b \rrbracket_{\mathcal{S}} = m \mapsto bm$  ( $a$  et  $b$  étant des caractères),  $\llbracket c \rrbracket_{\mathcal{S}} = m, n \mapsto mn$  et  $\llbracket R \rrbracket_{\mathcal{S}} = m, n \mapsto |m| = |n|$  ( $|m|$  représentant le nombre de lettre de  $m$ ).

Quelle est l'interprétation des termes :

**Q 3.1**  $f_a(c(f_b(v), f_a(v)))$  (0,5 points)

**Q 3.2**  $c(f_b(v), c(f_a(v), f_b(v)))$  (0,5 points)

**Q 3.3** Quelles sont les variables libres de  $\varphi = \exists m. R(c(y, m), f_a(m))$ ? Détaillez votre réponse. (0,5 points)

**Q 3.4** Décrivez l'interprétation de  $\varphi$  dans  $\mathcal{S}$  en une phrase. (0,5 points)

**Q 3.5** Pour quelles valeurs des variables libres  $\mathcal{S} \models \varphi$ ? (2 points)

#### Exercice 4 : SAT

Trouvez une valuation qui satisfait ces formules en utilisant soit une table de vérité soit DPLL. Donnez soit la table de vérité complète, soit les étapes de DPLL.

Q 4.1  $A \wedge (\neg B \Rightarrow C)$  (0,5 points)

Q 4.2  $(\neg A \wedge B) \vee (B \wedge \neg C) \vee (C \wedge A)$  (0,5 points)

Q 4.3  $(A \vee \neg B \vee \neg C \vee D) \wedge (B \vee \neg C \vee D) \wedge (B \vee A \vee \neg C) \wedge (\neg D \vee C \vee \neg A)$  (1 points)

#### Exercice 5 : Récursion primitive

Écrivez les *fonctions* suivantes sous forme primitive récursive :

Q 5.1 Factorielle  $fact(n) = n!$  (0,5 points)

Q 5.2 Exponentielle  $exp(n, p) = n^p$  (0,5 points)

Écrivez les *termes* primitifs récursifs pour ces fonctions :

Q 5.3 Factorielle  $fact(n) = n!$  On peut réutiliser la fonction  $mult(n, p)$ . (0,5 points)

Q 5.4 Exponentielle  $exp(n, p) = n^p$  On peut réutiliser la fonction  $mult(n, p)$ . (0,5 points)

#### Exercice 6 : Bonus

(2 points)

Cet exercice est un bonus. Ne le faites que si vous êtes certain d'avoir fait le reste parfaitement, ou si vous ne savez pas faire le reste. Sinon vous y perdrez trop de temps. Les règles du sudoku étaient décrites dans le TP 3.

	5					2		3
8			2					
		9	6	4	5			
6	2	5			4	8		
4	7	3				5		
5					2			
7		6		3				
					7	4		