

Devoir surveillé - session 2

Le seul document autorisé est une feuille A4 manuscrite recto/verso.

Le barème est indicatif, pour vous aider à savoir la quantité de détails attendu dans la réponse.

Exercice 1 : Prolog

Détaillez l'unification des termes suivants :

Q 1.1 $t_1 = A$ et $t_2 = a$ (0,5 points)

Q 1.2 $t_3 = A$ et $t_4 = B$ (0,5 points)

Q 1.3 $t_5 = a$ et $t_6 = b$ (0,5 points)

Q 1.4 $t_7 = f(g(A, b), C)$ et $t_8 = f(C, A)$ (0,5 points)

Écrivez les fonctions suivantes en Prolog :

Q 1.5 `pair` qui retourne `true` si l'entier en paramètre est pair. (1 points)

```
?- pair(0).  
true.
```

```
?- pair(5).  
false.
```

Q 1.6 `insert` qui insère un entier à la bonne place dans une liste triée. (1 points)

```
?- insert(5, [2,3,4,6,7],L).  
L = [2, 3, 4, 5, 6, 7].
```

Q 1.7 `triinsert` qui trie une liste avec l'algorithme de tri par insertion. La fonction de la question précédente peut bien évidemment être utilisée. (1 points)

```
?- triinsert([3,5,2,4,1],L).  
L = [1, 2, 3, 4, 5].
```

Exercice 2 : Logique propositionnelle

Q 2.1 Montrer que le système $\{\neg, \vee\}$ est un système complet de connecteurs. (2 points)

Démontrez ces formules en déduction naturelle.

Q 2.2 $(A \wedge B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow (B \Rightarrow C))$ (1 point)

Q 2.3 $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ (1 point)

Q 2.4 $A \vee \neg A$. Attention : difficile. (1 point)

Q 2.5 $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((\neg A \Rightarrow B) \Rightarrow B)$. Vous pouvez utiliser la démonstration de la question précédente avec la notation suivante :

$$\frac{}{\Gamma \vdash \varphi \vee \neg \varphi} te$$

(1 point)

Exercice 3 : Logique du premier ordre

Donnez les variables libres des formules suivantes, en détaillant votre démarche.

Q 3.1 $(\forall x. x = 0) \wedge (x < 0)$ (0,5 point)

Q 3.2 $\forall y. (y = 0 \wedge x < 0)$ (0,5 point)

Q 3.3 $\forall x. ((x = 0) \wedge (x < 0))$ (0,5 point)

Mettez les formules suivantes en forme normale conjonctive (FNC). Détaillez les étapes.

Q 3.4 $\neg(\forall x. x > y) \vee ((\exists x. x > 0) \Rightarrow (y > 0))$ (1 point)

Q 3.5 $((\exists x. x = y) \wedge \forall x. (x > y \vee x < 0)) \vee \neg(y < 0)$ (1,5 point)

Exercice 4 : SAT

Trouvez une valuation qui satisfait ces formules en utilisant soit une table de vérité (complète) soit DPLL (détaillez les étapes).

Q 4.1 $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg A \wedge C)$ (1 point)

Q 4.2 $(\neg A \vee B \vee \neg C) \wedge (D \vee \neg E \vee F) \wedge (A \vee C \vee E) \wedge (B \vee D \vee F) \wedge (A \vee B \vee E) \wedge (\neg C \vee \neg D \vee \neg F)$ (1 point)

Q 4.3 $(A \vee \neg B \vee C \vee \neg D) \wedge (A \vee \neg B \vee E \vee F) \wedge (D \vee C \vee E) \wedge (\neg A \vee B) \wedge (\neg E \vee \neg F)$ (1 point)

Exercice 5 : Récursion primitive

Q 5.1 Écrivez le terme primitif récursif correspondant à la fonction $eq0$ définie par : (1 point)

$$eq0(0) = Succ(0)$$

$$eq0(Succ(n)) = 0$$

En cours nous avons défini les termes $somme(n, p)$ qui calcule la somme de n et p ($n + p$), $pred(n)$ qui retourne le prédécesseur de n ($n - 1$), ainsi que $diff(n, p)$ qui retourne la soustraction positive de n et de p ($n - p$ si $n \geq p$, 0 sinon).

Q 5.2 Exprimez la fonction $eq(n, p)$ qui retourne $Succ(0)$ si $n = p$, 0 sinon. (1 point)

Vous pouvez utiliser les fonctions $somme$, $pred$, $diff$ et $eq0$.