Université Lille 1 - Sciences et Technologies
Licence Informatique 2012–2013

UE AL - Automates et Logique

DS n^{o}1

Logique propositionnelle et logique du premier ordre

Durée : 1h30 – Seuls les documents fournis avec le sujet sont autorisés

Important : tout ce que vous démontrez dans une question peut être utilisé dans une question suivante.

Exercice 1 : ***La barre de Sheffer (système complet)*** *(3 points)*
Dans cet exercice nous allons utilier un nouveau connecteur ‡, appelé la barre de Sheffer. Elle est définie comme : $\varphi \ddagger \psi \equiv \neg(\varphi \wedge \psi)$. Ce connecteur logique est très utilisé en électronique, vous comprendrez peut être pourquoi grâce à cet exercice. Voici sa table de vérité :

A	B	$\varphi \ddagger \psi$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Q 1.1 . Donnez une formule équivalente à $\neg\varphi$ avec uniquement le connecteur ‡
Q 1.2 . Donnez une formule équivalente à $\varphi \wedge \psi$ avec uniquement le connecteur ‡
Q 1.3 . Donnez une formule équivalente à $\varphi \vee \psi$ avec uniquement le connecteur ‡
Q 1.4 . Donnez une formule équivalente à $\varphi \Rightarrow \psi$ avec uniquement le connecteur ‡
Q 1.5 . Donnez une formule équivalente à $\varphi \Leftrightarrow \psi$ avec uniquement le connecteur ‡
Q 1.6 . Démontrez que le système $\{\ddagger\}$ est un système complet.

Exercice 2 : ***Les pires et les purs (logique propositionnelle)*** *(9 points)*
Inspiré de *Quel est le titre de ce livre ?, Raymond Smullyan*
Sur une île étrange habitent deux espèces de personnes : les *pires* et les *purs*. Les *pires* mentent toujours et les *purs* disent toujours la vérité. Tous les habitants sont soit des *pires* soit des *purs*, mais ne peuvent pas être les deux à la fois.
Indications :
– Nous noterons A le fait que l'habitant A soit un pur, et $\neg A$ le fait qu'il soit un pire.
– Comme A est soit un *pur* soit un *pire*, nous pouvons utiliser $A \vee \neg A$ comme hypothèse.
– Par définition, quelle que soit la phrase prononcée φ, on peut dire que $A \Leftrightarrow \varphi$ est toujours vrai et nous pouvons l'utiliser comme hypothèse.
Si vous n'êtes pas d'accord, justifiez le clairement ou passez à l'exercice suivant.

Q 2.1 . Avant mon voyage je me posais des questions sur les habitants de cette île. Je me disais qu'on pouvait dire beaucoup de choses évidentes sur eux, mais que ce n'est pas si facile de le montrer. Par exemple je me disais : « rencontrer un *pur* implique que rencontrer un autre *pur* implique que les deux sont *purs* ».
Pouvez-vous me le montrer à l'aide de la déduction naturelle ? Explicitez chacune des règles que vous utilisez, et quand vous déchargez une hypothèse, dites moi pourquoi.

Q 2.2 . Mon premier jour sur l'île, je rencontre un habitant A qui m'affirme être un *pur*.
Q 2.2.1. Donnez la formule φ correspondant à ce que m'a dit A.
Q 2.2.2. Écrivez la table de vérité correspondant à la formule $A \Leftrightarrow \varphi$
Q 2.2.3. Est-ce que A est un pur ou un pire ?

Q 2.3 . Si je vous dis que lors de mon deuxième jour sur l'île, un habitant A qui m'a avoué être un *pire*.
Q 2.3.1. Donnez la formule φ correspondant à ce que m'a dit A.
Q 2.3.2. Écrivez la table de vérité correspondant à la formule $A \Leftrightarrow \varphi$
Q 2.3.3. Est-ce que A est un pur ou un pire ?

Q 2.4 . Le même jour, j'ai rencontré deux habitants A et B. A m'a dit : « je suis un *pire* mais B n'en est pas un. »

Q 2.4.1. Donnez la formule φ correspondant à ce que m'a dit A.

Q 2.4.2. Écrivez la table de vérité correspondant à la formule $A \Leftrightarrow \varphi$

Q 2.4.3. Quelle est la nature de A et de B ?

Q 2.5 . Considérons deux habitants A et B. A affirme « au moins l'un de nous deux est un *pire*. »

Q 2.5.1. Déterminez l'espèce de A et de B sans faire de table de vérité, en expliquant votre raisonnement avec vos propres mots.

Q 2.5.2. Démontrez le à l'aide de la déduction naturelle.

Exercice 3 : *logique du premier ordre* *(8 points)*

Deux ans plus tard je suis retourné sur l'île des *purs* et des *pires*. J'ai vite appris que beaucoup de choses se sont passées :

– certains habitants sont devenus *fous*. Ainsi les *purs* devenus *fous* mentent toujours désormais, et les *pires* devenus *fous* disent maintenant toujours la vérité.
– certains des habitants se sont *mariés*. Les personnes mariées, qu'elles soient *pures* ou non, *folles* ou non, disent toujours la vérité. La vie est belle sur cette île finalement.

La situation étant devenue très compliquée il va nous falloir utiliser la logique du premier ordre pour chercher à comprendre qui est quoi. Nous introduisons donc une nouvelle notation :

– Nous noterons $pur(x)$ si x est *pur* et $\neg pur(x)$ si il est *pire*.
– Nous noterons $fou(x)$ si x est *fou* et $\neg fou(x)$ si il est *sain d'esprit*.
– Nous noterons $maries(x, y)$ si x et y sont mariés et $\neg maries(x, y)$ si ils ne le sont pas. La relation est symmétrique, ainsi $\forall x.\forall y.marie(x, y) \Leftrightarrow marie(y, x)$

Q 3.1 . Utilisez ces notations pour exprimer le fait que tout habitant est soit *fou* soit *sain d'esprit*.

Q 3.2 . Avant de poser des questions pour savoir la nature des habitants je souhaite savoir comment interpréter leurs réponses. Par exemple quand un habitant x m'affirme φ, deux ans auparavant je savais que $\varphi \Leftrightarrow pur(x)$. Mais d'après ce que j'ai appris ce n'est plus exact.

Q 3.2.1. Pouvez-vous me donner la formule correcte ?

Q 3.2.2. Identifiez les variables libres de la formule en détaillant les étapes.

Q 3.3 . J'ai appris un fait intéressant : tous les *pires* sont *mariés*.

Q 3.3.1. Pouvez-vous exprimer ceci sous la forme d'une formule ?

Q 3.3.2. La formule de la question 3.2 se simplifie vu que tous les *pires* sont *mariés* et que toutes les personnes *mariées* disent la vérité. Donnez une nouvelle version, simplifiée, de la formule sur la véracité d'une assertion φ énoncée par x.

Q 3.4 . Étant armé logiquement, j'entame une conversation avec deux habitants :

– x me dit que ni elle ni y ne sont mariés
– y me dit qu'il est marié avec x

Q 3.4.1. Écrivez la formule logique correspondant à l'assertion de x. Soulignez les variables libres.

Q 3.4.2. Écrivez la formule logique correspondant à l'assertion de y. Soulignez les variables libres.

Q 3.4.3. Est-ce que x et y sont *mariés* ensemble ? Justifiez votre réponse en utilisant la déduction naturelle.

Q 3.4.4. Pouvez-vous dire si y est *pur* ou *pire* ? Démontrez le à l'aide de la déduction naturelle.

Q 3.4.5. Pouvez-vous dire si y est *fou*, *sain d'esprit* ? Démontrez le à l'aide de la déduction naturelle.

Exercice 4 : *Bonus : le lemme de Pierce* *(+1 points)*

Le lemme de Pierce est une propriété évidente mais qui est difficile à démontrer. Ceci est un exercice bonus, et du fait de sa difficulté, ne le faites que si vous vous ennuyez après avoir fini le reste.

Q 4.1 . Démontrez que $\vdash ((P \Rightarrow Q) \Rightarrow P) \Rightarrow P$