

---

## DS n°3

### Sujet de rattrapage

*Durée : 1h30* – Document autorisé : 1 page A4 manuscrite recto verso, avec nom et prénom

Important : tout ce que vous démontrez dans une question peut être utilisé dans une question suivante.

#### Exercice 1 : Logique propositionnelle

(7 points)

Gandalf et ses compagnons se sont perdus dans la Moria. Après avoir erré pendant des jours dans des couloirs froids et humides, ils arrivèrent à une impasse d'où partent deux portes surmontées chacune d'une pancarte. Cette fois-ci, toutes ses ressources magiques du grand magicien ne lui seront d'aucune utilité, il va devoir se fier à son sens de la logique.

La pancarte de la porte de gauche dit : « Sortie », alors que la pancarte de droite dit : « Ces deux portes mènent au Balrog ». Bien qu'étant de valeureux combattants, nos amis préfèrent éviter de combattre le Balrog, et préfèrent trouver la sortie. Cependant il y a une contradiction entre les deux pancartes. Sur ce Gandalf s'assoit et sort une feuille de brouillon de son sac afin de mieux réfléchir.

Gandalf note  $G$  si la porte de gauche est la sortie ou  $\neg G$  si elle cache le Balrog. De manière similaire il note  $D$  la porte de droite si elle est la sortie et  $\neg D$  si elle cache le Balrog.

**Q 1.1** . Écrivez les formules  $\varphi_G$  et  $\varphi_D$  correspondant aux affirmations écrites au dessus des portes de gauche et de droite. (1 points)

**Q 1.2** . Gandalf sait que le goblin qui a posé les pancartes est peut être un filou. Il en déduit que les pancartes disent soit toutes les deux la vérité, soit mentent toutes les deux. Écrivez la formule  $\varphi$ , qui dépend de  $\varphi_G$  et de  $\varphi_D$ , décrivant la véracité des pancartes. (1 points)

**Q 1.3** . Quelle porte Gandalf et ses compagnons doivent-ils emprunter ? Écrivez la table de vérité de  $\varphi_G$ ,  $\varphi_D$  et  $\varphi$  pour vous aider à trouver la solution. (2 points)

**Q 1.4** . Gandalf a trouvé une réponse et la communauté poursuit son chemin. Cependant après plusieurs heures de marche, ils arrivent à une nouvelles impasse, avec trois portes cette fois-ci. Il y a une inscription en nain sur chacune de ces portes :

- Porte de gauche : « si cette porte mène au Balrog, alors la porte du milieu aussi »
- Porte du milieu : « si cette porte mène au Balrog, alors celle de droite mène à la sortie »
- Porte de droite : « la porte de gauche mène au Balrog »

Donnez les formules  $\varphi_G$ ,  $\varphi_M$  et  $\varphi_D$  correspondant aux inscriptions de ces 3 portes, en utilisant un codage similaire à celui utilisé à la dernière intersection. (1,5 points)

**Q 1.5** . Gimli fait remarquer que les nains sont des gens honorables, et qu'ils n'écrivent pas des choses fausses sur les portes. Il affirme qu'il faut prendre la porte de droite. Legolas ne fait pas confiance en Gimli et sort une feuille de brouillon de ses poches elfiques pour vérifier la réponse de Gimli à l'aide de la déduction naturelle. (1,5 points)

#### Exercice 2 : Logique du premier ordre

(3 points)

Les commentateurs de Roland Garros se sont ennuyés cette année. Alors qu'ils commentaient les matchs pour la télévision, ils faisaient des exercices de logique. Ils ont noté *Joue* la relation binaire disant que deux joueurs se sont affrontés, et *Gagne* la relation binaire disant qu'un joueur a gagné contre le second.

**Q 2.1** . Le vainqueur du tournoi se démarque des autres joueurs par le fait qu'il a gagné tous ses matchs. Écrivez la formule logique exprimant le fait que *Nadal* a gagné Roland Garros. Soulignez les variables liées.

**Q 2.2** . À l'inverse, tous les joueurs éliminés ont perdu un match. Écrivez la formule exprimant le fait que *Monfils* s'est fait éliminer. Soulignez les variables liées.

**Q 2.3 .** Les commentateurs remarquent aussi que les joueurs n'ont pas joué contre tous les autres. Écrivez une formule logique exprimant le fait que chaque match a eu un vainqueur. Soulignez les variables liées.

**Exercice 3 : Langages réguliers**

(4 points)

Donnez une expression régulière et un AFD pour les langages suivants. Vous n'avez pas besoin de détailler les étapes.

**Q 3.1 .** Les mots de deux lettres sur l'alphabet  $\{a, b\}$ . (1 points)

**Q 3.2 .** Les suites non vides de  $ab$ . (1 points)

**Q 3.3 .** Les mots sur l'alphabet  $\{a, b\}$  contenant au moins deux  $a$ . (1 points)

**Q 3.4 .** Les mots sur l'alphabet  $\{a, b\}$  n'ayant jamais deux  $a$  de suite. (1 points)

**Exercice 4 : De l'expression régulière à l'AFD**

(6 points)

Nous nous intéressons aux mots reconnus par l'expression régulière  $(a|b)a^*ab$ , et nous souhaitons construire un AFD correspondant.

**Q 4.1 .** Construisez un AFN avec  $\epsilon$  en utilisant les règles de construction vues en cours. (2 points)

**Q 4.2 .** Déterminez votre AFN tout en supprimant les  $\epsilon$ -transitions. Détaillez les étapes et renommez les nouveaux états pour plus de clareté. (2 points)

**Q 4.3 .** Minimisez l'AFD obtenu en détaillant les étapes. (2 points)