Logique

Logique intuitionniste

Thomas Pietrzak
Licence Informatique

Université de Lille 1 Sciences et Technologies

Preuves non constructives

Proposition : il existe deux irrationnels a et b tels que a^b soit rationnel

On pose $r = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$. Nous ne savons pas si r est rationnel ou irrationnel.

Soir r est rationnel, donc $a = b = \sqrt{2}$

Soit r est irrationnel, on pose $a = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$, $b = \sqrt{2}$ et $a^b = (((\sqrt{2})^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}) = ((\sqrt{2})^{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}) = (\sqrt{2})^2 = 2$

On a démontré la proposition, mais on ne connait pas les valeurs de a et b.

Preuves non constructives

Exemple : démontrer $A \vee B$

Stratégies de démonstration :

Preuve directe : $\vee_{ig}$ ou $\vee_{id}$: donner une preuve de A ou une preuve de B

Preuve indirecte : supposer $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$ et trouver une contradiction.

Avec la preuve directe on sait si c'est A ou B qui est vraie, pas avec la preuve indirecte.

Preuves non constructives

Exemple : démontrer $\exists x.A$

Stratégies de démonstration :

Preuve directe : $\exists_i$: prouver $A[t/x]$ pour un t donné

Preuve indirecte : supposer $\neg\exists x.A \equiv \forall x.\neg A$ et trouver une contradiction.

Avec la preuve directe on sait si c'est A ou B qui est vraie, pas avec la preuve indirecte.

Tiers exclus

$$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \vee \neg\varphi \qquad \dfrac{}{\Gamma, \varphi \vdash \varphi}\,ax \qquad \dfrac{\Gamma, \neg\varphi \vdash \bot}{\Gamma, \neg\varphi \vdash \varphi}\,\bot_e}{\Gamma \vdash \varphi}\,\vee_e$$

A ∨ ¬A

Une propriété est soit vraie soit fausse.

$$\dfrac{\Gamma, \neg\varphi \vdash \bot}{\Gamma \vdash \varphi}\,\bot_c$$

On ne sait pas quel cas est vrai est quel cas est faux.

Logique Classique

$$\frac{\Gamma, \neg A \vdash \bot}{\Gamma \vdash A} \bot_c$$

Le raisonnement par l'absurde est autorisé

¬¬A ⇔ A

Logique Minimale

Logique minimale (LM)

Pas de règles pour $\perp$

$\perp$ est une variable comme une autre

On conserve les règles $\neg_i$ et $\neg_e$, $\neg A$ étant une notation pour $A \Rightarrow \perp$

Logique minimale (LM)

Si φ est démontrable en logique minimale sous les hypothèses Γ, on note $\Gamma \vdash_m \varphi$

LM n'est pas complète !

Certaines formules vraies ne sont plus démontrables :

$\neg\neg A \Rightarrow A$

$(\neg A \vee B) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$

$$\neg\neg A \Rightarrow A$$

$\perp$ étant considéré comme une variable comme une autre, cela revient à :

$$((A \Rightarrow B) \Rightarrow B) \Rightarrow A$$

Or cette formule n'est même pas prouvable en logique classique, car ce n'est pas une tautologie ($A = \perp$, $B = \top$).

$(\neg A \lor B) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$

On ne peut pas montrer B avec une contradiction

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash \neg A \lor B}\,ax \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A, \neg A \vdash \neg A}\,ax \qquad \dfrac{}{A, \neg A \vdash A}\,ax}{\neg A \lor B, A, \neg A \vdash \bot}\,\neg_e}{\neg A \lor B, A, \neg A \vdash B}\,? \qquad \dfrac{}{\neg A \lor B, A, B \vdash B}\,ax}{\dfrac{\neg A \lor B, A \vdash B}{\neg A \lor B \vdash A \Rightarrow B}\,\Rightarrow_i}\,\lor_e}{\vdash (\neg A \lor B) \Rightarrow (A \Rightarrow B)}\,\Rightarrow_i$$

Traduction de Gödel

Soit A^g la **traduction de Gödel** de la formule A

$\bot^g = \bot$

$A^g = \neg\neg A$ si A est atomique et différent de $\bot$

$(\neg A)^g = \neg A^g$

$(A \wedge B)^g = A^g \wedge B^g$

$(A \vee B)^g = A^g \vee B^g$

$(A \Rightarrow B)^g = A^g \Rightarrow B^g$

$(\forall x.A)^g = \forall x.A^g$

$(\exists x.A)^g = \neg\neg\exists x.A^g$

Exemple

$((\neg A \lor B) \Rightarrow (A \Rightarrow B))^g = (\neg A \lor B)^g \Rightarrow (A \Rightarrow B)^g$

$= ((\neg A)^g \lor B^g) \Rightarrow (A^g \Rightarrow B^g)$

$= (\neg A^g \lor \neg\neg B) \Rightarrow (\neg\neg A \Rightarrow \neg\neg B)$

$= (\neg\neg\neg A \lor \neg\neg B) \Rightarrow (\neg\neg A \Rightarrow \neg\neg B)$

$\vdash_m (\neg\neg\neg A \lor \neg\neg B) \Rightarrow (\neg\neg A \Rightarrow \neg\neg B)$

Théorème

$$\Gamma \vdash_c A \ ssi \ \Gamma^g, Eq_\perp \vdash_m A^g$$

Toute formule prouvable en logique classique peut être prouvée en logique minimale.

Il faut la traduire, ainsi que ses hypothèses avec la traduction de Gödel.

$$Eq_\perp = \forall x, y\{\neg\neg(x = y) \Rightarrow (x = y)\}$$

Logique Intuitionniste

Logique intuitionniste

$$\frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash A} \bot_e$$

On autorise le *ex falso*

De l'absurde on peut tout déduire.

Très utilisé en politique.

Logique intuitionniste (LI)

Si φ est démontrable en logique intuitionniste sous es hypothèses Γ, on note $\Gamma \vdash_i \varphi$

LI n'est pas complète !

Certaines formules vraies ne sont plus démontrables :

$\neg\neg A \Rightarrow A$

$((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A$: Loi de Peirce

$\neg\neg A \Rightarrow A$

D'un point de vue constructif, $\neg\neg A$ veut dire : « A n'est pas contradictoire »

Si A est vrai alors A n'est pas contradictoire. $A \Rightarrow \neg\neg A$

Si A n'est pas contradictoire, on ne peut pas forcément en déduire A.

$\neg\neg A \Rightarrow A$

x un réel

A = x est rationnel : $\exists a.\ \exists b.\ x = a / b$, a et b entiers

Preuve intuitionniste : trouver a et b

Preuve classique : prouver $\neg\neg A$, c'est-à-dire que A n'est pas irrationnel.

Traduction de Kuroda

Soit $A^k = \neg\neg A^{k'}$ la **traduction de Kuroda** de la formule A

$A^{k'} = A$ si A est atomique

$(\neg A)^{k'} = \neg A^{k'}$

$(A \wedge B)^{k'} = A^{k'} \wedge B^{k'}$

$(A \vee B)^{k'} = A^{k'} \vee B^{k'}$

$(A \Rightarrow B)^{k'} = A^{k'} \Rightarrow B^{k'}$

$(\forall x.A)^{k'} = \forall x.\neg\neg A^{k'}$

$(\exists x.A)^{k'} = \exists x.A^{k'}$

Exemple

$$(\forall x.\ (A \wedge B) \Rightarrow \forall x.A \wedge \forall x.B)^k = \neg\neg((\forall x.\ (A \wedge B))^k \Rightarrow (\forall x.A \wedge \forall x.B)^k)$$

$$= \neg\neg(\forall x.\ \neg\neg(A \wedge B)^k \Rightarrow ((\forall x.A)^k \wedge (\forall x.B)^k))$$

$$= \neg\neg(\forall x.\ \neg\neg(A^k \wedge B^k) \Rightarrow (\forall x.\neg\neg A^k \wedge \forall x.\neg\neg B^k))$$

Théorème

$$\Gamma \vdash_c A \ ssi \ \Gamma^k, Eq_\perp \vdash_i A^k$$

Toute formule prouvable en logique classique peut être prouvée en logique intuitionniste.

Il faut la traduire, ainsi que ses hypothèses avec la traduction de Kuroda.

$$Eq_\perp = \forall x, y\{\neg\neg(x = y) \Rightarrow (x = y)\}$$

Théorème

L’existence d’une démonstration dans LM et LI est indécidable.