Logique

Logique du Premier Ordre

Thomas Pietrzak
Licence Informatique

Université de Lille 1 Sciences et Technologies

Syntaxe

Termes

Variables $\mathrm{Var} = \{\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \ldots\}$

Signature

Symboles de **constantes** $\{\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \ldots\}$

Symboles de **fonction** $\{\mathrm{f}, \mathrm{g}, \mathrm{h}, \ldots\}$

Fonctions

$\{\mathrm{f}, \mathrm{g}, \mathrm{h}, \ldots\}$

Arité : nombre de paramètres

Fonctions d'arité 0 : constantes

Exemples : addition, concaténation, tri, …

Termes

Ensemble des **termes** $\mathcal{T}_\Sigma = \{t, u, \dots\}$

Plus petit ensemble contenant :

constantes

variables

si t_1, …, t_n des termes et f une fonction d'arité n alors $f(t_1, \dots, t_n)$ est un terme

Variables libres

Variables libres d'un terme :

$$vl(x) = \{x\}$$

$$vl(a) = \emptyset$$

$$vl(f(t_1, \ldots, t_n)) = vl(t_1) \cup \cdots \cup vl(t_n)$$

Un terme est **clos** s'il n'a pas de variable libre.

Variables libres

Exemple

vl(f(h(a, g(x)), h(b, y)) =

Variables libres

Exemple

$vl(f(h(a, g(x)), h(b, y)) = vl(h(a, g(x)) \cup vl(h(b, y))$

Variables libres

Exemple

$$\mathrm{vl}(f(h(a, g(x)), h(b, y)) = \mathrm{vl}(h(a, g(x)) \cup \mathrm{vl}(h(b, y))$$

$$= \mathrm{vl}(a) \cup \mathrm{vl}(g(x)) \cup \mathrm{vl}(b) \cup \mathrm{vl}(y)$$

Variables libres

Exemple

$$vl(f(h(a, g(x)), h(b, y)) = vl(h(a, g(x)) \cup vl(h(b, y))$$

$$= vl(a) \cup vl(g(x)) \cup vl(b) \cup vl(y)$$

$$= \varnothing \cup vl(x) \cup \varnothing \cup \{y\}$$

Variables libres

Exemple

$$\begin{aligned} vl(f(h(a, g(x)), h(b, y))) &= vl(h(a, g(x)) \cup vl(h(b, y)) \\ &= vl(a) \cup vl(g(x)) \cup vl(b) \cup vl(y) \\ &= \varnothing \cup vl(x) \cup \varnothing \cup \{y\} \\ &= \{x\} \cup \{y\} \end{aligned}$$

Variables libres

Exemple

$$
\begin{aligned}
vl(f(h(a, g(x)), h(b, y))) &= vl(h(a, g(x)) \cup vl(h(b, y)) \\
&= vl(a) \cup vl(g(x)) \cup vl(b) \cup vl(y) \\
&= \varnothing \cup vl(x) \cup \varnothing \cup \{y\} \\
&= \{x\} \cup \{y\} \\
&= \{x\ ,y\}
\end{aligned}
$$

Substitution

La **substitution** d'un terme t a une variable x dans un terme u, notée $u[t/x]$:

$$y[t/x] = \begin{cases} t & si\ y = x \\ y & sinon \end{cases}$$

$$c[t/x] = c$$

$$f(t_1, \ldots, t_n)[t/x] = f(t_1[t/x], \ldots, f_n[t/x])$$

Substitution

Exemple

$f(a, g(h(x, b), y), x)[i(z)/x] =$

Substitution

Exemple

$f(a, g(h(x, b), y), x)[i(z)/x] = f(a[i(z)/x], g(h(x, b), y)[i(z)/x], x[i(z)/x])$

Substitution

Exemple

$$f(a, g(h(x, b), y), x)[i(z)/x] = f(a[i(z)/x], g(h(x, b), y)[i(z)/x], x[i(z)/x])$$

$$= f(a, g(h(x, b)[i(z)/x], y[i(z)/x]), i(z))$$

Substitution

Exemple

$f(a, g(h(x, b), y), x)[i(z)/x] = f(a[i(z)/x], g(h(x, b), y)[i(z)/x], x[i(z)/x])$

$= f(a, g(h(x, b)[i(z)/x], y[i(z)/x]), i(z))$

$= f(a, g(h(x[i(z)/x], b[i(z)/x]), y), i(z))$

Substitution

Exemple

$f(a, g(h(x, b), y), x)[i(z)/x] = f(a[i(z)/x], g(h(x, b), y)[i(z)/x], x[i(z)/x])$

$= f(a, g(h(x, b)[i(z)/x], y[i(z)/x]), i(z))$

$= f(a, g(h(x[i(z)/x], b[i(z)/x]), y), i(z))$

$= f(a, g(h(i(z), b), y), i(z))$

Relations

$\{P, Q, R, \ldots\}$

Aussi appelés **prédicats**

Arité : nombre de paramètres

Relations d'arité 0 : $\perp$, $\top$

Exemples : égalité, appartenance, parité, …

Formules

Ensemble des **formules** $\mathcal{F}^1_\Sigma = \{\varphi, \psi, \ldots\}$

Plus petit ensemble contenant :

$\perp$

si t_1, …, t_n des termes et R une relation d'arité n alors $R(t_1, \ldots, t_n)$ est une formule

Si φ et Ψ sont des formules, alors ces phrases sont des formules :

$\varphi \wedge \Psi$, $\varphi \vee \Psi$, $\varphi \Rightarrow \Psi$, $\varphi \Leftrightarrow \Psi$, $\neg \varphi$

$\forall x.\ \varphi$, $\exists x.\ \varphi$: **quantificateurs universels**

Variables libres

Occurrence de x dans φ est **libre** si elle n'est pas dans une sous-formule de φ commençant par $\forall \mathrm{x}$ ou $\exists \mathrm{x}.\ \varphi$. Sinon elle est **liée**.

Une variable est libre dans φ si elle a au moins une occurrence libre dans φ.

Une formule est **close** si elle ne contient pas de variable libre.

Variables libres

$$vl(\bot) = \emptyset$$

$$vl(R(t_1, \ldots, t_n)) = vl(t_1) \cup \ldots \cup vl(t_n)$$

$$vl(\neg\varphi) = vl(\varphi)$$

$$vl(\varphi \vee \psi) = vl(\varphi \wedge \psi) = vl(\varphi \Rightarrow \psi) = vl(\varphi \Leftrightarrow \psi) = vl(\varphi) \cup vl(\psi)$$

$$vl(\forall x.\varphi) = vl(\exists x.\varphi) = vl(\varphi) - \{x\}$$

Variables libres

Exemple

$vl(\forall x.(x > y) \wedge \exists z.(t = z)) =$

Variables libres

Exemple

$vl(\forall x.(x > y) \wedge \exists z.(t = z)) = vl(\forall x.(x > y)) \cup vl(\exists z.(t = z))$

Variables libres

Exemple

$vl(\forall x.(x > y) \wedge \exists z.(t = z)) = vl(\forall x.(x > y)) \cup vl(\exists z.(t = z))$

$= vl(x > y) - \{x\} \cup vl(t = z) - \{z\}$

Variables libres

Exemple

$vl(\forall x.(x > y) \wedge \exists z.(t = z)) = vl(\forall x.(x > y)) \cup vl(\exists z.(t = z))$

$= vl(x > y) - \{x\} \cup vl(t = z) - \{z\}$

$= (vl(x) \cup vl(y)) - \{x\} \cup (vl(t) \cup vl(z)) - \{z\}$

Variables libres

Exemple

$$vl(\forall x.(x > y) \wedge \exists z.(t = z)) = vl(\forall x.(x > y)) \cup vl(\exists z.(t = z))$$

$$= vl(x > y) - \{x\} \cup vl(t = z) - \{z\}$$

$$= (vl(x) \cup vl(y)) - \{x\} \cup (vl(t) \cup vl(z)) - \{z\}$$

$$= \{x, y\} - \{x\} \cup \{t, z\} - \{z\}$$

Variables libres

Exemple

$$vl(\forall x.(x > y) \wedge \exists z.(t = z)) = vl(\forall x.(x > y)) \cup vl(\exists z.(t = z))$$

$$= vl(x > y) - \{x\} \cup vl(t = z) - \{z\}$$

$$= (vl(x) \cup vl(y)) - \{x\} \cup (vl(t) \cup vl(z)) - \{z\}$$

$$= \{x, y\} - \{x\} \cup \{t, z\} - \{z\}$$

$$= \{y\} \cup \{t\}$$

Variables libres

Exemple

$$\begin{aligned}
vl(\forall x.(x > y) \wedge \exists z.(t = z)) &= vl(\forall x.(x > y)) \cup vl(\exists z.(t = z)) \\
&= vl(x > y) - \{x\} \cup vl(t = z) - \{z\} \\
&= (vl(x) \cup vl(y)) - \{x\} \cup (vl(t) \cup vl(z)) - \{z\} \\
&= \{x, y\} - \{x\} \cup \{t, z\} - \{z\} \\
&= \{y\} \cup \{t\} \\
&= \{y, t\}
\end{aligned}$$

x et z sont liées, y et t sont libres

Substitution

La **substitution** $\varphi[t/x]$ d'un terme t à une variable x dans une formule φ se restreint aux **occurrences libres** de x.

$$\bot[t/x] = \bot$$

$$R(t_1, \ldots, t_n)[t/x] = R(t_1[t/x], \ldots, t_n[t/x])$$

$$(\varphi \vee \psi)[t/x] = \varphi[t/x] \vee \psi[t/x]$$

$$(\varphi \wedge \psi)[t/x] = \varphi[t/x] \wedge \psi[t/x]$$

$$(\varphi \Rightarrow \psi)[t/x] = \varphi[t/x] \Rightarrow \psi[t/x]$$

$$(\varphi \Leftrightarrow \psi)[t/x] = \varphi[t/x] \Leftrightarrow \psi[t/x]$$

$$(\neg\varphi)[t/x] = \neg(\varphi[t/x])$$

$$(\forall y.\varphi)[t/x] = \begin{cases} \forall y.\varphi & si\ x = y \\ \forall y.(\varphi[t/x] & sinon \end{cases}$$

$$(\exists y.\varphi)[t/x] = \begin{cases} \exists y.\varphi & si\ x = y \\ \exists y.(\varphi[t/x] & sinon \end{cases}$$

Capture de variable

Les substitutions qui **capturent** une variable libre ne sont pas autorisées.

Toute variable libre de t ne doit pas être sous un quantificateur dans $\varphi[t/x]$

En cas de problème : renommage des variables liées

Exemple

$$(\forall x. x + y = 0)[x/y] \not\equiv \forall x. x + x = 0$$

$$(\forall x. x + y = 0)[x/y] \equiv \forall x'. x' + x = 0$$

Sémantique

Σ-structures

Une Σ-structure $\mathcal{S}$ sur un domaine $\mathcal{D}$ définit l'interprétation des symboles :

constantes a $\in \Sigma$	$[\![a]\!]_{\mathcal{S}} \in \mathcal{D}$
fonctions n-aires f $\in \Sigma$	$[\![f]\!]_{\mathcal{S}} \in \mathcal{D}^n \longrightarrow \mathcal{D}$
relations n-aires R $\in \Sigma$	$[\![R]\!]_{\mathcal{S}} \in \mathcal{D}^n \longrightarrow \{0,1\}$

Σ-structures

Exemple : arithmérique, $\mathcal{D} = \mathbb{N}$

constantes : 0, 1, 2, …

fonctions : +, –, ×, ÷, mod

relations : =, <, >, ≤, ≥, pair, impair

Interprétation des termes

Interprétation $[\![t]\!]_{\mathcal{S}} \in \mathcal{D}$ d'un **terme clos** $t \in \mathcal{T}_\Sigma$

$$[\![a]\!]_{\mathcal{S}} = [\![a]\!]_{\mathcal{S}}$$

$$[\![f(t_1, \ldots, t_n)]\!]_{\mathcal{S}} = [\![f]\!]_{\mathcal{S}}([\![t_1]\!]_{\mathcal{S}}, \ldots, [\![t_n]\!]_{\mathcal{S}})$$

Interprétation des formules

Interprétation $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{S}} \in \mathcal{D}$ d'une **formule close** $\varphi \in \mathcal{F}^1_\Sigma$

$$[\![\bot]\!]_{\mathcal{S}} = 0$$

$$[\![R(t_1, \ldots, f_n)]\!]_{\mathcal{S}} = [\![R]\!]_{\mathcal{S}}([\![t_1]\!]_{\mathcal{S}}, \ldots, [\![f_n]\!]_{\mathcal{S}})$$

$$[\![(\varphi \vee \psi)]\!]_{\mathcal{S}} = max([\![\varphi]\!]_{\mathcal{S}}, [\![\psi]\!]_{\mathcal{S}})$$

$$[\![(\varphi \wedge \psi)]\!]_{\mathcal{S}} = min([\![\varphi]\!]_{\mathcal{S}}, [\![\psi]\!]_{\mathcal{S}})$$

$$[\![(\varphi \Rightarrow \psi)]\!]_{\mathcal{S}} = 0 \ ssi \ [\![\varphi]\!]_{\mathcal{S}} = 1 \ et \ [\![\psi]\!]_{\mathcal{S}} = 0$$

$$[\![(\varphi \Leftrightarrow \psi)]\!]_{\mathcal{S}} = 1 \ ssi \ [\![\varphi]\!]_{\mathcal{S}} = [\![\psi]\!]_{\mathcal{S}}$$

$$[\![(\neg\varphi)]\!]_{\mathcal{S}} = 1 - [\![\varphi]\!]_{\mathcal{S}}$$

$$[\![(\exists x.\varphi)]\!]_{\mathcal{S}} = sup\{[\![\varphi[t/x]]\!]_{\mathcal{S}} \mid t \in \mathcal{T}_\Sigma\}$$

$$[\![(\forall x.\varphi)]\!]_{\mathcal{S}} = inf\{[\![\varphi[t/x]]\!]_{\mathcal{S}} \mid t \in \mathcal{T}_\Sigma\}$$

Satisfiabilité

Une Σ-structure S **satisfait** une formule φ, dénoté $\mathcal{S} \models \varphi$, ssi $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{S}} = 1$ pour toute substitution de ses variables libres.

φ est **valide**, dénoté $\models \varphi$, si elle est satisfaite par toute Σ-structure.

Conséquence sémantique

Soit Γ un ensemble de formules de $\mathcal{F}^1_\Sigma$, $\mathcal{S}$ est un **modèle** de Γ, dénoté $\mathcal{S} \models \Gamma$ ssi $\mathcal{S} \models \varphi$ pour tout $\varphi \in \Gamma$.

φ est une **conséquence sémantique** de Γ, dénoté $\Gamma \models \varphi$ ssi tout modèle de Γ satisfait φ.

Propriétés

Propriétés

Deux formules φ et ψ sont équivalentes, dénoté $\varphi \equiv \psi$ ssi $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{S}} = [\![\psi]\!]_{\mathcal{S}}$

pour toute Σ-structure S

$\equiv$ est une relation d'équivalence

Propriétés

Les équivalences propositionnelles sont toujours valides.

Lois de De Morgan

$$\neg\forall x.\varphi \equiv \exists x.\neg\varphi \qquad \forall x.\varphi \equiv \neg\exists x.\neg\varphi$$

$$\neg\exists x.\varphi \equiv \forall x.\neg\varphi \qquad \exists x.\varphi \equiv \neg\forall x.\neg\varphi$$

Propriétés

Inversion des quantificateurs

$$\forall x.\forall y.\varphi \equiv \forall y.\forall x.\varphi \qquad \exists x.\exists y.\varphi \equiv \exists y.\exists x.\varphi$$

Suppression des quantificateurs

$$\forall x.\varphi \equiv \varphi \; si \; x \notin vl(\varphi) \qquad \exists x.\varphi \equiv \varphi \; si \; x \notin vl(\varphi)$$

Propriétés

Distributivité des quantificateurs

$$\forall x.(\varphi \land \psi) \equiv \forall x.\varphi \land \forall x.\psi \qquad \forall x.(\varphi \lor \psi) \equiv \forall x.\varphi \lor \psi \; si \; x \notin vl(\psi)$$

$$\exists x.(\varphi \lor \psi) \equiv \exists x.\varphi \lor \forall x.\psi \qquad \exists x.(\varphi \land \psi) \equiv \exists x.\varphi \land \psi \; si \; x \notin vl(\psi)$$

Propriétés

Renommage des variables liées

$$\forall x.\varphi \equiv \forall y.(\varphi[y/x]) \ si \ y \notin vl(\varphi)$$

$$\exists x.\varphi \equiv \exists y.(\varphi[y/x]) \ si \ y \notin vl(\varphi)$$

Toute formule φ est équivalente à une formule ψ dans laquelle les variables liées sont distinctes des variables libres.

Formes normales

Formes prénexes

Quantificateurs

$$Q_1 x_1 . Q_2 X_2 . \dots . Q_n x_n . \varphi$$

Formule sans quantificateurs

Toute formule est équivalente à une formule en forme prénexe

FNC

Une formule en forme prénexe est en **forme normale conjonctive** (FNC) si la formule sans quantificateurs est une clause ou une conjonction de clauses.

Toute formule est équivalente à une FNC.

Mise en FNC

1. Renommer les variables sous quantificateurs

$$\forall x.\varphi \equiv \forall y.(\varphi[y/x]) \ si \ x \notin vl(\varphi)$$

$$\exists x.\varphi \equiv \exists y.(\varphi[y/x]) \ si \ x \notin vl(\varphi)$$

2. Remonter les quantificateurs

$$\neg\forall x.\varphi \equiv \exists x.\neg\varphi \qquad \forall x.(\varphi \wedge \psi) \equiv \forall x.\varphi \wedge \forall x.\psi$$

$$\forall x.\varphi \equiv \neg\exists x.\neg\varphi \qquad \forall x.(\varphi \vee \psi) \equiv \forall x.\varphi \vee \psi \ si \ x \notin vl(\psi)$$

$$\neg\exists x.\varphi \equiv \forall x.\neg\varphi \qquad \exists x.(\varphi \vee \psi) \equiv \exists x.\varphi \vee \forall x.\psi$$

$$\exists x.\varphi \equiv \neg\forall x.\neg\varphi \qquad \exists x.(\varphi \wedge \psi) \equiv \exists x.\varphi \wedge \psi \ si \ x \notin vl(\psi)$$

3. Mettre la formule sans quantificateurs en FNC

Mise en FNC

Exemple

$(\forall x.\ x + y = 0) \wedge ((x = 2) \vee (\exists y.\ y > x)) \equiv$

Mise en FNC

Exemple

$(\forall x.\ x + y = 0) \wedge ((x = 2) \vee (\exists y.\ y > x)) \equiv (\forall z.\ z + y = 0) \wedge ((x = 2) \vee (\exists y.\ y > x))$

Mise en FNC

Exemple

$(\forall x.\ x + y = 0) \land ((x = 2) \lor (\exists y.\ y > x)) \equiv (\forall z.\ z + y = 0) \land ((x = 2) \lor (\exists y.\ y > x))$

$\equiv \forall z.((z + y = 0) \land ((x = 2) \lor (\exists y.\ y > x)))$

Mise en FNC

Exemple

$$(\forall x.\ x + y = 0) \wedge ((x = 2) \vee (\exists y.\ y > x)) \equiv (\forall z.\ z + y = 0) \wedge ((x = 2) \vee (\exists y.\ y > x))$$

$$\equiv \forall z.((z + y = 0) \wedge ((x = 2) \vee (\exists y.\ y > x)))$$

$$\equiv \forall z.((z + y = 0) \wedge ((x = 2) \vee (\exists t.\ t > x)))$$

Mise en FNC

Exemple

$(\forall x.\ x + y = 0) \wedge ((x = 2) \vee (\exists y.\ y > x)) \equiv (\forall z.\ z + y = 0) \wedge ((x = 2) \vee (\exists y.\ y > x))$

$\equiv \forall z.((z + y = 0) \wedge ((x = 2) \vee (\exists y.\ y > x)))$

$\equiv \forall z.((z + y = 0) \wedge ((x = 2) \vee (\exists t.\ t > x)))$

$\equiv \forall z.((z + y = 0) \wedge \exists t.((x = 2) \vee (t > x)))$

Mise en FNC

Exemple

$$(\forall x.\ x + y = 0) \wedge ((x = 2) \vee (\exists y.\ y > x)) \equiv (\forall z.\ z + y = 0) \wedge ((x = 2) \vee (\exists y.\ y > x))$$

$$\equiv \forall z.((z + y = 0) \wedge ((x = 2) \vee (\exists y.\ y > x)))$$

$$\equiv \forall z.((z + y = 0) \wedge ((x = 2) \vee (\exists t.\ t > x)))$$

$$\equiv \forall z.((z + y = 0) \wedge \exists t.((x = 2) \vee (t > x)))$$

$$\equiv \forall z.\exists t.((z + y = 0) \wedge ((x = 2) \vee (t > x)))$$

Déduction Naturelle

Déduction naturelle

Extension de la déduction naturelle de la logique propositionnelle

Ajout des règles pour les quantificateurs universels : $\forall$ et $\exists$

Quantificateurs

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \qquad x \text{ n'est pas libre dans } \Gamma}{\Gamma \vdash \forall x.\varphi}\,\forall_i$$

Pour tout intro

Si on peut démontrer une formule sous certaines hypothèses, et qu'une variable n'apparait pas dans ces hypothèses, alors on peut démontrer cette formule pour toute valeur de cette variable.

Quantificateurs

Risque de capture de variable

$$\frac{x > 0 \vdash x = 3}{x > 0 \vdash \forall x . x = 3} \forall_i \text{ FAUX}$$

Généralisation illégale d'un cas particulier

Quantificateurs

$$\frac{\Gamma \vdash \forall x.\varphi}{\Gamma \vdash \varphi[t/x]} \forall_e$$

Pour tout elim

Si on peut démontrer une formule quelle que soit la valeur d'une variable, alors on peut la démontrer pour une valeur particulière.

Les variables libres de t ne doivent pas être capturées dans $\varphi[t/x]$.

Quantificateurs

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi[t/x]}{\Gamma \vdash \exists x.\varphi} \exists_i$$

Il existe intro

Si on peut montrer une formule, alors on peut montrer une abstraction de cette formule .

Les variables libres de t ne doivent pas être capturées dans $\varphi[t/x]$.

Quantificateurs

$$\frac{\Gamma \vdash \exists x.\varphi \qquad \Gamma, \varphi \vdash \psi \qquad x \text{ n'est libre ni dans } \Gamma \text{ ni dans } \psi}{\Gamma \vdash \psi}\ \exists_e$$

Il existe elim

Si on peut déduire une formule sous l'hypothèse de l'existence d'un objet, alors cette formule peut être utilisée comme hypothèse, pour un objet donné n'étant pas utilisé dans le reste de la démonstration.

Généralisation de la règle ou elim.

Quantificateurs

Risque de capture de variable.

x n'est pas forcément l'objet qui a la propriété souhaitée.

$$\dfrac{\dfrac{}{x = 0 \vdash \exists x . x > 0}\,\mathbb{N} \qquad \dfrac{\dfrac{}{x = 0, x > 0 \vdash x = 1}\,ax \qquad \dfrac{}{x = 0, x > 0 \vdash x = 0}\,ax}{x = 0, x > 0 \vdash x = 0 \wedge x = 1}\,\wedge_e}{x = 0 \vdash x = 0 \wedge x = 1}\,\exists_i \ \text{FAUX}$$

Propriétés

$$\vdash (\forall x.A \vee \forall x.B) \Rightarrow \forall x.(A \vee B)$$

$$\vdash \exists x.(A \wedge B) \Rightarrow (\exists x.A \wedge \exists x.B)$$

Égalité

$$\frac{}{\Gamma \vdash t = t} =_i$$

Égal intro

Une valeur est égale à elle-même.

Égalité

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi[t/x] \qquad \Gamma \vdash t = u}{\Gamma \vdash \varphi[u/x]} =_e$$

Égal élim

Deux termes égaux ont les mêmes propriétés.

Complétude

La logique du premier ordre est complète.

$$si\ \Gamma \models \varphi\ alors\ \Gamma \vdash \varphi$$

Démonstration

Même démonstration que dans le cas propositionnel.

On prouve les cas des règles avec quantificateurs.

Démonstrations **FAUSSES**

x n'est pas libre dans A quand on applique $\exists_e$

$$\dfrac{\dfrac{}{\exists x.A \vdash \exists x.A}\,ax \qquad \dfrac{}{\exists x.A, A \vdash A}\,ax}{\dfrac{\dfrac{\exists x.A \vdash A}{\exists x.A \vdash \forall x.A}\,\forall_i}{\vdash \exists x.A \Rightarrow \forall x.A}\,\Rightarrow_i}\,\exists_e \text{ FAUX}$$

Démonstrations **FAUSSES**

Cette règle $\exists_e$ n'existe pas

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\exists x.A \vdash \exists x.A}\,ax}{\exists x.A \vdash A}\,\exists_e \text{ FAUX}}{\exists x.A \vdash \forall x.A}\,\forall_i}{\vdash \exists x.A \Rightarrow \forall x.A}\,\Rightarrow_i$$